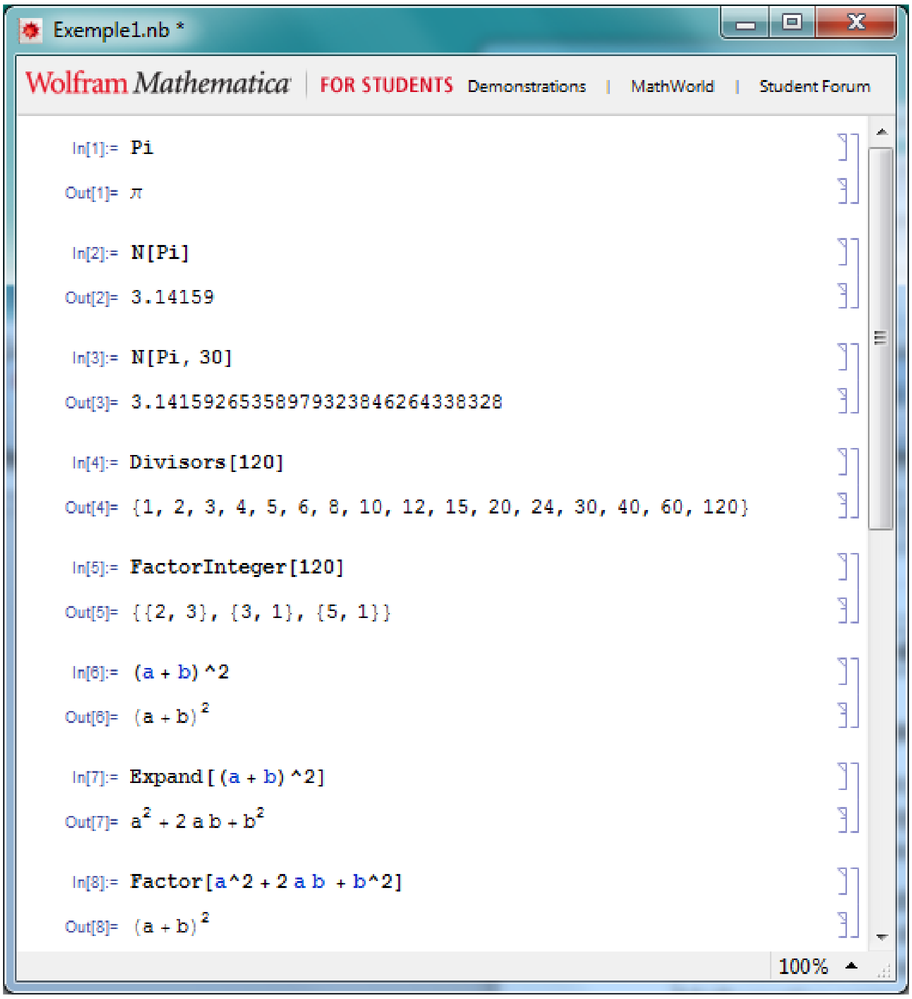
1. Résolution d'équations avec Mathematica

Mathematica est un programme de mathématique, il effectue des calculs symboliques et numériques et permet de tracer des graphes et de dessiner d'autres objets géométriques.

Au démarrage, Mathematica affiche un *cahier* vide qui s'utilise de façon semblable à un éditeur de textes.
Pour effectuer un calcul ou faire tracer un graphe, il faut taper la commandes Mathematica correspondante dans le cahier, puis pez Shift + Return. Mathematica fait alors précéder la commande de *In[...]:=* puis calcule et affiche la réponse précédée de *Out[n] =*.

Exemple



En Mathematica, le symbole d'égalité s'écrit à l'aide d'un signe égal répété.

Exemple

x^3 – 3x + 2 = = 0 , Sin[x] = = x/2 , 1000*r^24 – 460*(r^n – 1)/(r – 1) = =0 sont considérées comme des équations par Mathematica.
Pour résoudre une équation, Mathematica offre diverses possibilités.

- Pour trouver les valeurs exactes des solutions d'une équation pour laquelle il existe une formule algébrique de résolution (équations polynomiales de degré inférieur à 5 par exemple), il faut utiliser la commande **Solve**.

  Exemples

  - **Solve[x^2 – 3 x + 2 = = 0, x]**
  - **Solve[a*x^2 + b*x + c = = 0, x]**
  - **Solve[a*x^2 + b*x + c = = 0, a]**
  - **Solve[Sin[z] = = Cos[z], z]**

- Pour trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation polynomiale, on peut utiliser la commande **NSolve**.

  Exemples

  - **NSolve[x^2 – 3x + 2 = = 0, x]**
  - **NSolve[x^7 – 3.123 x + 1 = = 0, x]**

- Pour trouver une valeur approchée (proche d'un nombre donné) d'une solution d'une équation quelconque, on peut utiliser la commande **FindRoot**.

  Exemples

  - **FindRoot[x^2 – 3x + 2 = = 0, {x , 1}]**
  - **FindRoot[x^7 –3.123 x + 1 = = 0, {x , 3}]**
  - **FindRoot[Sin[z] = = z/4 , {z ,1}]**

- Pour tracer le graphe d'une fonction, on peut utiliser la commande **plot**

  Exemples

  - **Plot[x^3 – x^2 , {x , –1 , 2}]**
    trace le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x^2$ pour des valeurs de x comprises entre –2 et 2.
  - **Plot[x^3 – x^2 , {x , –1 , 2} , PlotRange -> {-2 , 2}]**
    trace le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x^2$ pour des valeurs de x comprises entre –2 et 2 et des valeurs de y comprises entre –2 et 2.
  - **Plot[{x^3 – x^2 , x^2 – 1}, {x , –2 , 2} , PlotRange -> {-2 , 8}]**
    trace, dans le même système d'axes, les graphes des fonctions $f(x) = x^3 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 1$ pour des valeurs de x comprises entre –2 et 2 et des valeurs de y comprises entre –2 et 8.

- **Plot[x^3 – x^2 , {x , –1 , 2} , PlotRange -> {-2 , 2}] , AspectRatio-> Automatic, GridLines->Automatic]**
  trace le graphe dans un repère orthonormé et dessine un quadrillage.

- Il est possible de définir des constantes; par exemple t1 = 1.03 permet d'utiliser, par la suite, la constante t1 au lieu de 1.03.

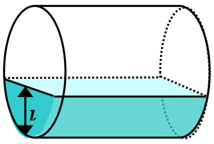
- Il est possible de définir des fonctions; par exemple **f[x_] :=x^3–x^2** permet d'utiliser, par la suite, la fonction ***f*[*x*]** au lieu de ***x*^3 – *x*^2**.
  Dans la définition d'une fonction ***f*[*x*_]** , le symbole **x_** indique que l'on peut remplacer **x** par n'importe quoi.
  Le symbole " **:=** " est le symbole l'affectation différé. L'expression de droite est évaluée chaque fois que la variable est utilisée.

Exercice 1

a) L'aire d'un triangle rectangle vaut 12 cm². La hauteur issue de l'angle droit partage l'hypoténuse en deux parties de longueurs respectives 2 cm et x cm. Déterminer x.
Indications : utiliser les théorèmes des triangles rectangles.

b) Un stère de bois (cube de 1 m de côté) est entassé contre une maison. À quelle distance d de la maison faut-il poser le pied d'une échelle de 10 m pour qu'elle s'appuie tant contre la façade que contre l'angle du stère ?

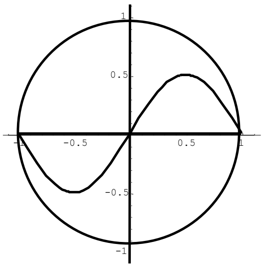
c) Une cuve à mazout a deux mètres de long et un mètre de diamètre, Elle peut donc, au maximum, contenir 1'570,8 litres.
On désire graduer cette cuve pour 500, 1000 et 1500 litres.
Trouver les hauteurs h de ces graduations.



d) Dessiner les graphes des fonctions f et g puis déterminer leurs points d'intersection.
1) $f(x) = \sin(x)\,, g(x) = \frac{1}{4}x^2$
2) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^2, g(x) = x^2 - 2$.

e) Déterminer l'ensemble de définition et tous les zéros de la fonction
$f(x) = \ln(4x^2 + 3x + 1) - \frac{1}{x}$.
Indications
- $\ln(x) = \log_e(x)$ où $e = 2{,}718281828\ldots$ et s'écrit **Log[*x*]** pour Mathematica
- $\ln(x)$ n'est défini que si $x > 0$

f) Faire tracer un cercle centré à l'origine et de rayon $r = 1$ à l'aide des graphes de deux fonctions f et g à trouver, puis reproduire le dessin ci-contre



Indication

Le graphe de $f(x) = a\sin(bx)$ est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{b}$ et d'amplitude a.

4. a) Tracer les graphes des fonctions

$f_1(x) = \sin(x)$

$f_2(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3)$

$f_3(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3) + \frac{1}{5}\sin(5)$

$f_{10}(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3) + \frac{1}{5}\sin(5) + \cdots \frac{1}{19}\sin(19x)$

$f_{100}(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3) + \frac{1}{5}\sin(5) + \cdots \frac{1}{199}\sin(199x)$

Indications

La commande Mathematica **Sum** permet de construire une somme

Exemples

f[x_]:=Sum[(2k + 1) x^k , {k , 0 , 5 }]

construit la fonction $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + 11x^5$.

s=Sum[1/k^2 , {k , 1 , infinity }]

calcule la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{15} + \cdots$

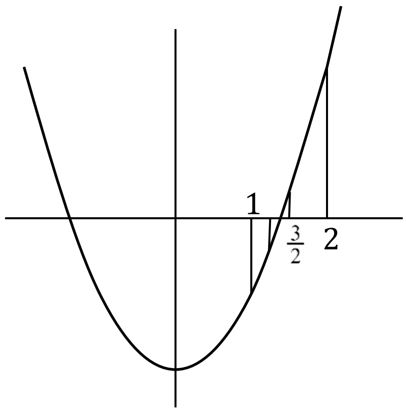
2. La méthode de bissection

Lorsqu'aucune formule de permet de résoudre une équation nous devons recourir à des méthodes numériques qui fournissent des approximations des zéros.
Dans le cas particulier de la **recherche des zéros d'une fonction continue**, un des algorithmes à disposition s'appelle la méthode de la bissection. Basée sur le Théorème de Bolzano, elle est présentée dans l'exemple qui suit.

Théorème de Bolzano
Une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$, dont le signe de $f(a)$ n'est pas le même que celui de $f(b)$ admet nécessairement un zéro dans l'intervalle $[a; b]$.

Exemple

Cherchons une estimation de $\sqrt{2}$ ou, ce qui revient au même, de la solution positive z de l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = x^2 - 2$.



On sait que $f(0) = -2$ et que $f(2) = 2$, donc que z est compris entre 0 et 2 (théorème de Bolzano).
L'intervalle [0 ; 2] contient la solution cherchée.
Puisque z et compris entre 0 et 2, prenons, comme première estimation le milieu de l'intervalle $[0; 2]$, $m = \frac{0+2}{2} = 1$.
On a $f(1) = 1^2 - 2 = -1$.

La fonction f change de signe entre 1 et 2 (elle ne change pas de signe entre 0 et 1); on prend donc l'intervalle $[1; 2]$ comme nouvel intervalle qui contient la solution cherchée.
Puisque z et compris entre 1 et 2, prenons, comme deuxième estimation le milieu de l'intervalle $[1; 2]$: $m = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$
On a $f(1{,}5) = (1{,}5)^2 - 2 = 0{,}25$.

$f(1) = -1 < 0$, $f(1{,}5) = 0{,}25 > 0$, $f(2) = 2 > 0$ donc la fonction f change de signe entre 1 et 1,5.
On prend donc l'intervalle [1 ; 1.5] comme nouvel intervalle qui encadre la solution cherchée.
Puisque z et compris entre 1 et 1,5, prenons, comme troisième estimation le milieu de l'intervalle $[1; 1{,}5]$: $m = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25$
On a $f(1{,}25) = (1{,}25)^2 - 2 = -0{,}4375$

$f(1) = -1 < 0$, $f(1{,}25) = -0{,}4375 < 0$, $f(1{,}5) = 0{,}25 > 0$ donc la fonction f change de signe entre 1,25 et 1,5.
On prend donc l'intervalle $[1{,}25; 1{,}5]$: comme nouvel intervalle qui encadre la solution cherchée.

À chaque étape la largeur de l'intervalle étant divisé par deux, on peut continuer ainsi jusqu'à l'obtention de la précision désirée.

Le tableau ci-dessous permet de résumer et de présenter les calculs précédents dans le recherche de la solution positive z de l'équation $x^2 - 2 = 0$ avec 4 chiffres significatifs.

x	Sgn($x^2 - 2$)	commentaires
0	–	
2	+	z est compris entre 0 et 2
1	–	z est compris entre 1 et 2
1,5	+	z est compris entre 1 et 1,5
1,25	–	z est compris entre 1,25 et 1,5
1,375	–	z est compris entre 1,375 et 1,5
1,438	+	z est compris entre 1,375 et 1,438
1,406	–	z est compris entre 1,406 et 1,438
1,422	+	z est compris entre 1,406 et 1,422
1,414	–	z est compris entre 1,414 et 1,422
1,418	+	z est compris entre 1,414 et 1,418
1,416	+	z est compris entre 1,414 et 1,416
1,415	+	z est compris entre 1,414 et 1,415
1,414*5*	+	z est compris entre 1,414 et 1,414*5*

La solution à 4 chiffres significatifs de l'équation est donc z = 1,414

Remarquons que, lorsque l'on sait que z est compris entre 1,414 et 1,415 (avant–dernière ligne du tableau), il n'est pas encore possible de décider de la meilleure solution à 4 chiffres significatifs. La dernière ligne du tableau permet de choisir entre 1,414 et 1,415.

Exercice 2

a) Esquisser les graphes des fonctions $y = \sin(x)$ et $y = \frac{1}{2}x$ puis estimer les abscisses des points d'intersection des 2 graphes.

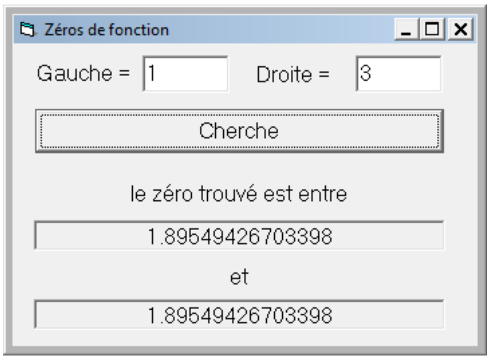
b) En complétant le tableau ci-dessous, trouver, par bissection, une estimation à 3 chiffres significatifs de la solution (différente de 0) de l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}x$.

x												
Signe($f(x)$)												

c) Trouver, par bissection, une estimation à 3 chiffres significatifs de la solution (différente de 0) de l'équation $\sin(x) - x^2 = 0$.

Exercice 3

a) Écrire un programme qui demande les bornes d'un intervalle $[G\,;D]$, teste si la fonction $f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$ change de signe sur l'intervalle donné puis, le cas échéant, trouve, par bissection, une bonne approximation d'une solution de l'équation $\sin(x) - \frac{x}{2} = 0$.



b) Modifier votre programme de sorte qu'il calcule et affiche le nombre d'itérations effectuées.

Exercice 4

Se convaincre que chacune des fonctions suivantes possède un zéro unique. Calculer ce zéro avec le programme réalisé à l'exercice précédent.

a) $f(x) = x^3 + 10$

b) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 100x^3 - 2$

c) $f(x) = 2x - 2 + \sin(x)$

d) $f(x) = 3x - \cos(x)$

Exercice 5

Pour trouver les **plusieurs zéros** situés entre deux limites G et D, d'une fonction continue, on procède par balayage :
Subdiviser l'intervalle $[G\,;D]$ en n sous-intervalles, pour chaque petit intervalle, tester s'il satisfait aux conditions du théorème de Bolzano et, le cas échéant, appliquer l'algorithme de la bissection.
Écrire un programme qui met en oeuvre l'algorithme de balayage, puis utiliser ce programme pour résoudre les équations suivantes :

a) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1{,}5 = 0$

c) $x^2 - x - \sqrt{x} + 1 = 0$

d) $2\cos(x) - x = 2$

e) $\sin(x) = 0$

f) $x\cos(x) = \sin(x)$

Exercice 6

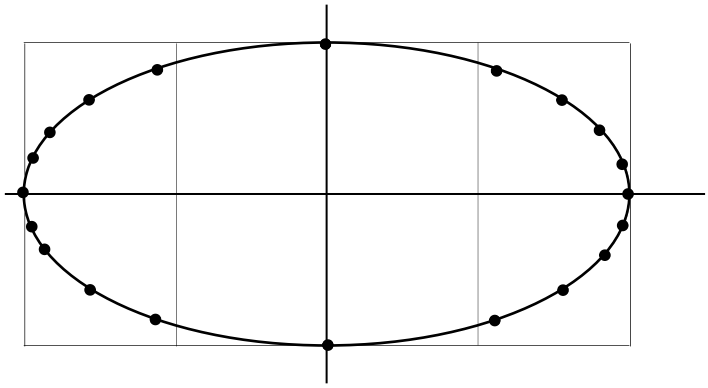
Une équation de la forme $f(x, y) = 0$ est appelée équation cartésienne d'une courbe. Par exemple, l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ a comme solution les points d'un cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon $r = 1$.

Pour dessiner des points de la courbe donnée par une équation de ce type, on se donne des valeurs pour y et calcule la ou les valeurs possibles pour x, en résolvant une équation à une inconnue, par balayages-bissection.

Exemple

Dessinons des points de la courbe donnée par l'équation $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ pour $y \in [-1; 1]$.

y	$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$	x_1	x_2
−1,0	$x^2 = 0$	0,00	
−0,8	$x^2 - 1{,}44 = 0$	−1,20	1,20
−0,6	$x^2 - 2{,}56 = 0$	−1,60	1,60
−0,4	$x^2 - 3{,}36 = 0$	−1,83	1,83
−0,2	$x^2 - 3{,}84 = 0$	−1,96	1,96
0,0	$x^2 - 4 = 0$	−2,00	2,00
0,2	$x^2 - 3{,}84 = 0$	−1,96	1,96
0,4	$x^2 - 3{,}36 = 0$	−1,83	1,83
0,6	$x^2 - 2{,}56 = 0$	−1,60	1,60
0,8	$x^2 - 1{,}44 = 0$	−1,20	1,20
1,0	$x^2 = 0$	0,00	



Dessiner deux courbes parmi celles données par les équations cartésiennes ci dessous :

a) $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$ pour $y \in [-2 ; 2]$
b) $x^2 + y^3 = 2xy$ avec $x \in [-2 ; 2]$ et $y \in [-2 ; 2]$
c) $(x^2 + y^2)^2 = 4\,(x^2 - y^2)$ avec $x \in [-2 ; 2]$ et $y \in [-2 ; 2]$
d) $(x^2 + y^2 - 4)^3 = 108\,y^2$ avec $x \in [-3 ; 3]$ et $y \in [-3 ; 3]$
e) $(x^2 + y^2 - 4)^3 = 108\,x^2 y^2$ avec $x \in [-5 ; 5]$ et $y \in [-5 ; 5]$
f) $(x^2 + y^2)\,(x \cos(x) + y \cos(y)) = 2\,y^2$ avec $x \in [-5 ; 5]$ et $y \in [-10 ; 10]$

Exercice 7

Écrire un programme qui dessine des points d'une courbe donnée par une équation cartésienne.
Tester le programme avec les équations de l'exercice précédent

Exercice 8

Étant donné un polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ et un binôme $x - z$, écrire un programme qui calcule, en utilisant le schéma de Horner, le quotient et le reste de la division du polynôme par le binôme.

Utiliser le programme pour les divisions suivantes :

a) $(x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 11x + 5) : (x - 2)$
b) $(x^3 + 3x^2 - 2x + 6) : (x + 1)$
c) $(x^5 + 3x^4 - x^3 + 8x - 5) : (x + 3)$
d) $(x^6 - 1) : (x - 1)$

Exercice 9

Écrire un programme qui détermine les zéros d'un polynôme du 3ème degré.

Méthode

- Pour une valeur de a donnée, vérifier si le polynôme change de signe sur l'intervalle $[-a; a]$
- Si c'est le cas, chercher par bissection un zéro dans cet intervalle, sinon recommencer avec l'intervalle $[-2a; 2a]$
- Après avoir trouvé un premier zéro x_1, diviser le polynôme par $x - x_1$ pour obtenir un polynôme du 2e degré
- Chercher les zéros du polynôme du 2e degré à l'aide de la formule

Utiliser le programme pour trouver les zéros des polynômes suivants :

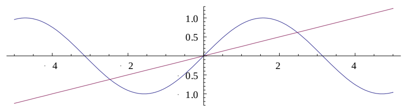
a) $P(x) = x^3 - 11x^2 + 26x - 16$
b) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 8$
c) $P(x) = 27 x^3 + 54x^2 + 36x + 8$
d) $P(x) = x^6 - 25x^4 - 5x^2 + 6$
e) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
f) $P(x) = 1{,}001x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
g) $P(x) = x^3 - 4{,}001x^2 + 5x - 2$
h) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5{,}001x - 2$
i) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2{,}001$

Solutions des exercices

1a $a \cong 3.83 \quad b \cong 6.26 \quad x \cong 5.34$

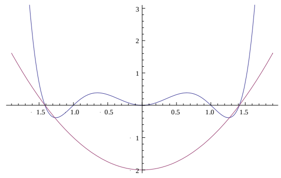
1b $h \cong 9.94$ ou $h \cong 1.11$

1c a) 35.5 cm / 60.8 cm / 90.9 cm



1d a) $x \cong \pm 2{,}474578$ et $x = 0$

b) $x \cong \pm 1{,}27202$ et $x \cong \pm 1{,}41421$



2 b) $x \cong 1.90$ c) $x \cong 0.877$

3 -

4 a) – 2.154 b) 0.272

c) 0.684 d) 0.317

5 a) $\{-1\ ;\ 0.5; 3\}$ b) $\pm\{0.98\ ;\ 0.64; 0.34\}$

c) $\{1\ ;\ 0.57\}$ d) $\{-3.70\ ;\ -1.11; 0\}$

e) $\{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ f) infinité de solutions, sans période

6 Vérifier avec Mathematica.

7 -

8 a) $q(x) = -1 + 5x - 2x^2 + x^3$ et $r = 3$

b) $q(x) - 4 + 2x + x^2$ et $r = 10$

c) $q(x) = -1 + 3x - x^2 + x^4$ et $r = -2$

d) $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ et $r = 0$

9 a) $\{1; 2; 8\}$ b) $\{-0.935; 2.463; 3.473\}$

c) $-\frac{2}{3}$ (triple) d) $\pm\{5.019; 0.635\}$

e) 1 (double) f) $\{0.970; 1.034; 1.992\}$

g) 2.004 h) $\{0.969; 1.033; 1.998\}$

i) 2.001